Volume et caractéristique d'Euler d'hypersurfaces nodales aléatoires

Thomas Letendre (ÉNS de Lyon)

Orsay – 23 juin 2016

Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n.
On choisit une hypersurface de M "au hasard".

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, courbure, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, nombres de Betti, caractéristique d'Euler, ...) ?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, comportement presque sûr...

Le cas des polynômes

Le cas des polynômes

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Le cas des polynômes

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Théorème (Kac, 1943)

Soit $P_d = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ *avec* a_i *des v.a.i.i.d. gaussiennes centrées réduites et* $Z_d = (P_d)^{-1}(0)$, *alors*

$$\mathbb{E}[\mathrm{card}\,(Z_d)] \sim \frac{2}{\pi}\ln(d).$$

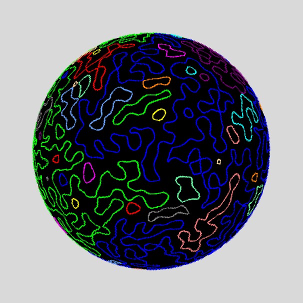
Théorème (Kostlan, 1993)

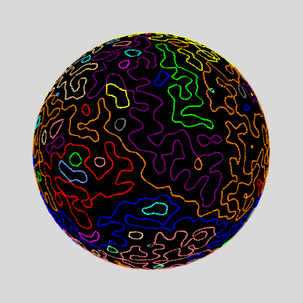
Si on choisit a_i *de variance* $\binom{d}{i}$, *on a* $\mathbb{E}[\mathrm{card}\,(Z_d)] = \sqrt{d}$.

En dimension supérieure

P_d polynôme homogène de degré d en $n+1$ variables,
Z_d le lieu des zéros de P_d dans $\mathbb{RP}^n$.

Si P_d est distribué selon une loi de Kostlan, Z_d est presque surement une hypersurface lisse.





Courbes algébriques aléatoires de degré 56 dans $\mathbb{RP}^2$.
Crédit images : Maria Nastasescu (Caltech).

En dimension supérieure

Théorème (Kostlan, 1993)

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_d)] = \mathrm{Vol}\left(\mathbb{RP}^{n-1}\right)\sqrt{d}.$$

Théorème (Podkorytov, 2001)

Si n est impair,

$$\mathbb{E}[\chi(Z_d)] \sim (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)}{\pi\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}\sqrt{d}^n,$$

où χ est la caractéristique d'Euler.

Résultats analogues en codimension quelconque :

- volume : Kostlan, 1993,
- caractéristique d'Euler : Bürgisser, 2006.

La caractéristique d'Euler

Définition

Pour une variété M de dimension n,

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim\left(H_i(M, \mathbb{R})\right).$$

- $\chi(M)$ est un invariant topologique.
- Pour une variété fermée de dimension impaire $\chi(M) = 0$.
- Si M est triangulée :

$$\chi(M) = \text{nbre sommets} - \text{nbre arêtes} + \text{nbre faces} + \cdots$$

- Pour une surface S fermée, connexe et orientée : $\chi(S) = 2 - 2g$, où g est le genre géométrique.

Variables gaussiennes

$(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ euclidien de dimension N,
Λ auto-adjoint et défini positif.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans V est gaussienne, centrée, de variance Λ, si sa loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Lambda^{-1}x\,, x\right\rangle\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(\Lambda)$.

Si X est réduite ($\Lambda = \mathrm{Id}$), alors dans toute base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, $X = \sum a_i e_i$ avec $(a_1, \dots, a_n)$ des v.a.i.i.d réelles de loi $\mathcal{N}(1)$.

Hypersurfaces nodales aléatoires

Espaces propres du laplacien

(M, g) variété riemannienne. La mesure riemannienne $|\mathrm{d}V_M|$ définit un produit scalaire L^2 sur $\mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\langle \varphi \,, \psi \rangle = \int_M \varphi \psi \, |\mathrm{d}V_M| \, .$$

On note $\Delta = d^* d$ l'opérateur de Laplace-Beltrami (dans $\mathbb{R}^n$, $\Delta = -\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$).

Faits classiques

- Les valeurs propres de Δ forment une suite strictement croissante : $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots$, et $\lambda_k \to +\infty$.
- Les espaces propres $\ker (\Delta - \lambda_k \, \mathrm{Id}) \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ sont de dimension finie.
- $\bigoplus_{k \geqslant 0} \ker (\Delta - \lambda_k \, \mathrm{Id})$ est dense dans $L^2(M)$.

Hypersurfaces nodales aléatoires

Pour $\lambda \geqslant 0$, on note $V_\lambda = \displaystyle\bigoplus_{\lambda_k \leqslant \lambda} \ker(\Delta - \lambda_k \, \mathrm{Id})$.

Définition

Soit f un vecteur gaussien $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$ dans V_λ et $Z_f = f^{-1}(0)$.
On dit que Z_f est une hypersurface nodale aléatoire.

Hypersurfaces nodales aléatoires

Pour $\lambda \geqslant 0$, on note $V_\lambda = \bigoplus_{\lambda_k \leqslant \lambda} \ker(\Delta - \lambda_k \operatorname{Id})$.

Définition

Soit f un vecteur gaussien $\mathcal{N}(\operatorname{Id})$ dans V_λ et $Z_f = f^{-1}(0)$.
On dit que Z_f est une hypersurface nodale aléatoire.

Lemme

Soient $\lambda \geqslant 0$ et $f_1, \ldots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\operatorname{Id})$, alors $Z_{\lambda,r} = Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_r}$ est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de M.

Volume moyen

Théorème (Bérard, 1985 – L., 2014)

Soient $\lambda \geqslant 0$, $r \in \{1, \dots, n\}$ et $f_1, \dots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite. Soit $Z_{\lambda,r} = Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_r}$, on a :

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_{\lambda,r})] = \left(\frac{\lambda}{n+2}\right)^{\frac{r}{2}} \mathrm{Vol}(M) \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} + O\left(\lambda^{\frac{r-1}{2}}\right)$$

lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$.

Volume moyen

Théorème (Bérard, 1985 – L., 2014)

Soient $\lambda \geqslant 0$, $r \in \{1, \dots, n\}$ et $f_1, \dots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite. Soit $Z_{\lambda,r} = Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_r}$, on a :

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_{\lambda,r})] = \left(\frac{\lambda}{n+2}\right)^{\frac{r}{2}} \mathrm{Vol}(M) \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} + O\left(\lambda^{\frac{r-1}{2}}\right)$$

lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$.

Théorème (Zelditch, 2009 – L., 2014)

Sous les mêmes hypothèses,

$$\left(\frac{n+2}{\lambda}\right)^{\frac{r}{2}} \mathbb{E}[Z_{\lambda,r}] \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} |\mathrm{d}V_M|$$

en tant que formes linéaires continues sur $\left(\mathcal{C}^0(M), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Caractéristique d'Euler moyenne

Théorème (L., 2014)

Soient $\lambda \geqslant 0$, $r \in \{1, \ldots, n\}$ et $f_1, \ldots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite. On note $Z_{\lambda,r} = Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_r}$.
Si $n - r$ est pair on a :

$$\mathbb{E}[\chi(Z_{\lambda,r})] = (-1)^{\frac{n-r}{2}} \left(\frac{\lambda}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{Vol}(M) \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r+1}\right)\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{r-1}\right)}{\pi\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right)$$

lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$.

Pour $n - r$ impair, $\chi(Z_{\lambda,r}) = 0$ presque surement.

Sur le cercle euclidien $\mathbb{S}^1$

$\Delta = -\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ et les fonctions propres satisfont : $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \lambda\varphi = 0.$

- Les valeurs propres sont les k^2 avec $k \in \mathbb{N}$.
- L'espace propre associé à k^2 est engendré par $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.
- V_λ est l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant \sqrt{\lambda}$.

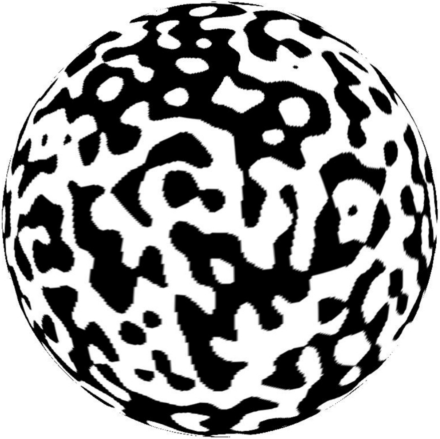
$$f_\lambda(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor} a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)\right),$$

où les a_k et b_k sont des v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(1)$.

Théorème (Bérard, 1985)

Lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$, $\qquad \mathbb{E}[\mathrm{card}(Z_\lambda)] = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda} + O(1).$

Courbe nodale sur la sphère



Domaines nodaux aléatoires sur la sphère euclidienne, $\lambda = 1640$.
Crédit image : Alex Barnett (Dartmouth).

Idées de preuve

Variété d'incidence

$V \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ sous-espace de dimension N.

$F : V \times M \to \mathbb{R}$, $F(f,x) = f(x)$ et $\Sigma = F^{-1}(0)$.

Lemme

Si V n'a pas de point base (i.e. $\forall x \in M$, $\exists f \in V$ tel que $f(x) \neq 0$) alors Σ est une hypersurface lisse de $V \times M$.

Démonstration.

Pour tout (f,x), $\partial_1 F : h \mapsto h(x)$ est surjective, donc F submersion. $\square$

Variété d'incidence

$V \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ sous-espace de dimension N.

$F : V \times M \to \mathbb{R}$, $F(f,x) = f(x)$ et $\Sigma = F^{-1}(0)$.

Lemme

Si V n'a pas de point base (i.e. $\forall x \in M$, $\exists f \in V$ tel que $f(x) \neq 0$) alors Σ est une hypersurface lisse de $V \times M$.

Démonstration.

Pour tout (f,x), $\partial_1 F : h \mapsto h(x)$ est surjective, donc F submersion. □

Les points critiques de $\pi_1 : \Sigma \to V$ sont les (f,x) tels que $d_x f = 0$.
Ses valeurs critiques sont les f qui ne s'annulent pas transversalement.

Par Sard, Z_f est presque surement une hypersurface.

Le noyau de Schwartz

$\Pi : L^2(M) \to V$ projection orthogonale.

Lemme

Il existe une unique fonction $e : M \times M \to \mathbb{R}$, appelée noyau de Schwartz, telle que :

$$\Pi(\varphi)(x) = \langle e(x, \cdot)\,, \varphi \rangle = \int_{y \in M} e(x, y)\varphi(y) \left| \mathrm{d}V_M \right| .$$

Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ est une base orthonormée de V,

$$e(x, y) = \sum \varphi_i(x)\varphi_i(y).$$

Le noyau de Schwartz

$\Pi : L^2(M) \to V$ projection orthogonale.

Lemme

Il existe une unique fonction $e : M \times M \to \mathbb{R}$, appelée noyau de Schwartz, telle que :

$$\Pi(\varphi)(x) = \langle e(x,\cdot)\,, \varphi\rangle = \int_{y\in M} e(x,y)\varphi(y)\,|\mathrm{d}V_M|\,.$$

Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ est une base orthonormée de V,

$$e(x,y) = \sum \varphi_i(x)\varphi_i(y).$$

Remarques

- e est lisse.
- Pour tout $x \in M$, $e(x,\cdot) \in V$.
- x est point base si et seulement si $e(x,x) = \sum \varphi_i(x)^2 = 0$.

La fonction de corrélation

Un vecteur gaussien centré réduit $f \in V$ définit un processus gaussien centré $(f(x))_{x \in M}$.

Fait

Si L est linéaire, alors $L(f)$ est encore un vecteur gaussien centré, et

$$\mathrm{Var}(L(f)) = LL^*.$$

Le processus $(f(x))$ est caractérisé par sa fonction de corrélation :

$$(x, y) \mapsto \mathbb{E}[f(x)f(y)]\,.$$

Remarque

$\mathbb{E}[f(x)f(y)] = 0$ si et seulement si $f(x)$ et $f(y)$ sont indépendants.

La fonction de corrélation

Lemme

Pour tout x et $y \in M$, $\mathbb{E}[f(x)f(y)] = e(x,y)$.

Démonstration.

Dans une base orthonormée $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ de V, on a $f = \sum a_i \varphi_i$ où les a_i sont des normales centrées réduites indépendantes.

$$\mathbb{E}[f(x)f(y)] = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant N} \mathbb{E}[a_i a_j]\, \varphi_i(x)\varphi_j(y) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x)\varphi_i(y) = e(x,y). \quad \square$$

En dérivant sous l'intégrale :

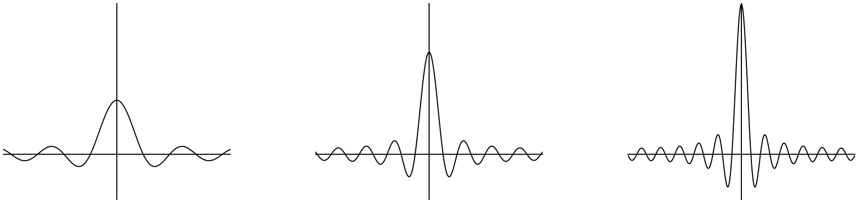
$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) f(y)\right] = \frac{\partial e}{\partial x_i}(x,y).$$

La fonction spectrale du laplacien

Pour $V_\lambda = \bigoplus_{\lambda_k \leqslant \lambda} \ker(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id})$, le noyau e_λ est la fonction spectrale de Δ.

Sur le cercle euclidien, c'est le noyau de Dirichlet :

$$e_\lambda(x,y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor + \frac{1}{2}\right)(x-y)\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}.$$



(a) $\lambda = 16$ (b) $\lambda = 64$ (c) $\lambda = 144$

Figure: Le noyau de Dirichlet

Comportement du noyau

Sur le cercle,

- $e_\lambda(x, y)$ ne dépend que de $d(x, y)$,
- échelle caractéristique : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

On a une limite d'échelle :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e_\lambda \left(x, x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(h)}{h}.$$

Sur M quelconque : échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et limite d'échelle (ne dépend que de n).

Théorème (Hörmander, 1968)

Il existe $C_n > 0$ telle que, lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$,

$$e_\lambda(x, x) = C_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}} \right).$$

Une heuristique

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$:

$$\simeq \mathrm{Vol}(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_λ ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Une heuristique

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$:

$$\simeq \mathrm{Vol}(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_λ ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Composantes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, donc volume de l'ordre de $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}}$.
Finalement $\mathrm{Vol}(Z_\lambda)$ est proportionnel à $\mathrm{Vol}(M)\sqrt{\lambda}$.

Une heuristique

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$:

$$\simeq \mathrm{Vol}(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_λ ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Composantes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, donc volume de l'ordre de $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}}$.
Finalement $\mathrm{Vol}(Z_\lambda)$ est proportionnel à $\mathrm{Vol}(M)\sqrt{\lambda}$.

De même, chaque boîte contribue une constante pour χ,
donc $\chi(Z_\lambda)$ proportionnel à $\mathrm{Vol}(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}}$.

La formule de Kac-Rice

Pour $V \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ de dimension N sans point base,

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_V \left(\int_{Z_f} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2} \right) |\mathrm{d}V_{Z_f}| \right) \mathrm{d}f$$

La formule de Kac-Rice

Pour $V \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ de dimension N sans point base,

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_V \left(\int_{Z_f} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2}\right) |\mathrm{d}V_{Z_f}| \right) \mathrm{d}f$$

$$= \int_\Sigma \cdots$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_M \left(\int_{\{f | f(x)=0\}} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2}\right) \mathrm{d}f \right) |\mathrm{d}V_M|$$

La formule de Kac-Rice

Pour $V \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ de dimension N sans point base,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_V \left(\int_{Z_f} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2}\right) |\mathrm{d}V_{Z_f}| \right) \mathrm{d}f \\
&= \int_\Sigma \cdots \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_M \left(\int_{\{f \mid f(x)=0\}} \frac{\|\nabla_x f\|}{\sqrt{e(x,x)}} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2}\right) \mathrm{d}f \right) |\mathrm{d}V_M|
\end{aligned}$$

La formule de Kac-Rice

Pour $V \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ de dimension N sans point base,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_V \left(\int_{Z_f} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2} \right) |\mathrm{d}V_{Z_f}| \right) \mathrm{d}f \\
&= \int_\Sigma \cdots \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_M \left(\int_{\{f \mid f(x)=0\}} \frac{\|\nabla_x f\|}{\sqrt{e(x,x)}} \exp\left(-\frac{\|f\|}{2} \right) \mathrm{d}f \right) \; |\mathrm{d}V_M| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M \frac{1}{\sqrt{e(x,x)}} \mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0 \right] |\mathrm{d}V_M| \,.
\end{aligned}$$

La preuve pour le volume

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \frac{1}{\sqrt{e(x,x)}} \mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0 \right] |\mathrm{d}V_M|$$

On peut exprimer $\mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0 \right]$ en fonction du noyau.

La preuve pour le volume

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_f)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \frac{1}{\sqrt{e(x,x)}} \mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0 \right] |\mathrm{d}V_M|$$

On peut exprimer $\mathbb{E}\left[\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0 \right]$ en fonction du noyau.

$(f(x), \nabla_x f)$ est un vecteur gaussien centré dans $\mathbb{R} \oplus T_x M$ de variance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e(x,x) & \partial_{y_1} e(x,x) & \cdots & \partial_{y_n} e(x,x) \\ \partial_{x_1} e(x,x) & \partial_{x_1}\partial_{y_1} e(x,x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{y_n} e(x,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e(x,x) & \partial_{x_n}\partial_{y_1} e(x,x) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{y_n} e(x,x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $\nabla_x f$ est une gaussienne centrée.
Sa variance s'obtient à partir de Λ.

La preuve pour le volume

Pour $V = V_\lambda$, on a des estimations pour le noyau et ses dérivées.

Théorème (Hörmander, 1968 – Bin, 2004)

Il existe C_n et $C'_n > 0$ tels que, lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$,

- $e_\lambda(x,x) = C_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i} e_\lambda(x,x) = O\left(\lambda^{\frac{n}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i}\partial_{y_j} e_\lambda(x,x) = \delta_{ij} C'_n \lambda^{\frac{n+2}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n+1}{2}}\right)$.

Avec une fonction-test

On peut faire la même chose avec une fonction-test $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$.

Formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E}\left[\int_{Z_f} \phi(f,x)\,|\mathrm{d}V_{Z_f}|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M \frac{\mathbb{E}\left[\phi(f,x)\,\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x)=0\right]}{\sqrt{e(x,x)}}\,|\mathrm{d}V_M|\,.$$

Avec une fonction-test

On peut faire la même chose avec une fonction-test $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$.

Formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E}\left[\int_{Z_f} \phi(f,x)\,|\mathrm{d}V_{Z_f}|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M \frac{\mathbb{E}\left[\phi(f,x)\,\|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x)=0\right]}{\sqrt{e(x,x)}}\,|\mathrm{d}V_M|\,.$$

Pour $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$ et $V = V_\lambda$, on obtient :

$$\left|\left(\frac{n+2}{\lambda}\right)\mathbb{E}\left[\int_{Z_\lambda} \phi\,|\mathrm{d}V_{Z_\lambda}|\right] - \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_M \phi\,|\mathrm{d}V_M|\right| \leqslant \|\phi\|_\infty\, O\!\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

La formule de Gauss-Bonnet

Preuve pour χ dans le cas $n = 3$: Z_f est une surface.

Théorème (Formule de Gauss-Bonnet)

$$\chi(Z_f) = \frac{1}{2\pi} \int_{Z_f} \kappa_f(x) \left|\mathrm{d}V_{Z_f}\right|,$$

où κ_f est la courbure de Gauss de Z_f.

La formule de Gauss-Bonnet

Preuve pour χ dans le cas $n = 3$: Z_f est une surface.

Théorème (Formule de Gauss-Bonnet)

$$\chi(Z_f) = \frac{1}{2\pi} \int_{Z_f} \kappa_f(x) \, |\mathrm{d}V_{Z_f}| \, ,$$

où κ_f est la courbure de Gauss de Z_f.

$$\mathbb{E}[\chi(Z_f)] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_M \frac{\mathbb{E}\left[\kappa_f(x) \, \|\nabla_x f\| \;\middle|\; f(x) = 0\right]}{\sqrt{e(x,x)}} \, |\mathrm{d}V_M|$$

Problème

Exprimer $\kappa_f(x)$ en fonction de f et ses dérivées en x.

La preuve pour χ

Formule de Gauss

$$\kappa_f(x) = K(T_x Z_f) + \det\left(\mathrm{II}_f(x)\right),$$

où K est la courbure sectionnelle de M,
II_f est la seconde forme fondamentale de Z_f.

$$\mathrm{II}_f(x) = \frac{1}{\|\nabla_x f\|}(\nabla_x^2 f)_{/T_x Z_f}$$

$(f(x), \nabla_x f, \nabla_x^2 f)$ est un vecteur gaussien centré,
sa variance dépend seulement de e et ses dérivées en (x, x).

La preuve pour χ

Formule de Gauss

$$\kappa_f(x) = K(T_x Z_f) + \det\left(\mathrm{II}_f(x)\right),$$

où K est la courbure sectionnelle de M,
II_f est la seconde forme fondamentale de Z_f.

$$\mathrm{II}_f(x) = \frac{1}{\|\nabla_x f\|}(\nabla_x^2 f)_{/T_x Z_f}$$

$(f(x), \nabla_x f, \nabla_x^2 f)$ est un vecteur gaussien centré,
sa variance dépend seulement de e et ses dérivées en (x, x).

- $K(T_x Z_f)$ est borné, indépendamment de x, f et λ.
- $\det\left(\mathrm{II}_f(x)\right)$ contribue un terme d'ordre λ.

Asymptotiquement, on ne voit plus la courbure ambiante.

D'autres résultats de géométrie aléatoire

Autres résultats

- Asymptotique pour la moyenne du cycle conormal de Z_λ, d'ordre $\lambda^{\frac{n}{2}}$.
  (Rivière – Dang, 2015)
  Permet de retrouver l'asymptotique de $\mathbb{E}[\chi(Z_\lambda)]$.
- Asymptotique de la variance pour la longueur de courbes nodales dans $\mathbb{S}^2$, d'ordre $\ln(\lambda)$.
  (Wigman, 2010)
- Moyenne des nombres de Betti de Z_λ : encadrement asymptotique d'ordre $\lambda^{\frac{n}{2}}$.
  (Gayet – Welschinger, 2014)

Autres résultats

Théorème (Nazarov – Sodin, 2015)

Soit (M, g) *riemannienne de dimension* n*, il existe* $C_n > 0$ *telle que, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{b_0(Z_f)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} - C_n \operatorname{Vol}(M)\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0.$$

Théorème (Gayet – Welschinger, 2015)

Soient (M, g) *riemannienne de dimension* n *et* Σ *une hypersurface fermée de* $\mathbb{R}^n$*. Alors*

$$\liminf_{\lambda \to +\infty} \mathbb{E}\left[\frac{N_\Sigma(f)}{\lambda^{\frac{n}{2}}}\right] \geqslant C_\Sigma,$$

où $N_\Sigma(f)$ *est le nombre de composantes de copies de* Σ *contenues dans* Z_f *et* $C_\Sigma > 0$ *est explicite.*

Cadre algébrique réel

X variété projective complexe de dimension n,
E fibré hermitien de rang r et L fibré en droites hermitien positif.

On suppose X, E et L munis de structures réelles et $\mathbb{R}X \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}H^0(X, E \otimes L^d)$: espace des sections holomorphes globales de $E \otimes L^d$, équivariante pour la structure réelle ($d \in \mathbb{N}$).

$s_d \in \mathbb{R}H^0(X, E \otimes L^d)$ vecteur aléatoire $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$, $Z_d = (s_d)^{-1}(0) \cap \mathbb{R}X$.

Lemme

Il existe $d_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $d \geqslant d_0$, Z_d est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de $\mathbb{R}X$.

Cadre algébrique réel

Théorème (L., 2014)

Soit $d \geqslant d_0$ *et* $s_d \in \mathbb{R}H^0(X, E \otimes L^d)$ *de loi* $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$. *Lorsque* $d \longrightarrow +\infty$, *on a :*

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_d)] = d^{\frac{r}{2}}\,\mathrm{Vol}(\mathbb{R}X)\,\frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} + O\left(d^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

et si $n-r$ *est pair,*

$$\mathbb{E}[\chi(Z_d)] = (-1)^{\frac{n-r}{2}}\,d^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{Vol}(\mathbb{R}X)\,\frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r+1}\right)\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{r-1}\right)}{\pi\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} + O\left(d^{\frac{n}{2}-1}\right).$$

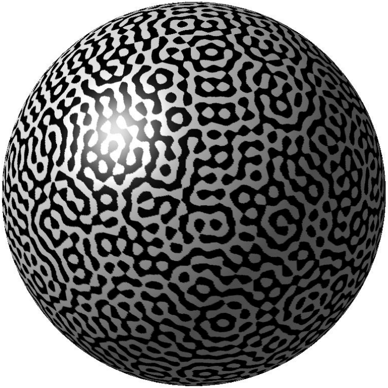
Théorème (L., 2014)

Sous les mêmes hypothèses,

$$\left(\frac{1}{d}\right)^{\frac{r}{2}}\mathbb{E}[Z_d] \xrightarrow[d\to+\infty]{} \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)}\,|\mathrm{d}V_{\mathbb{R}X}|\,,$$

en tant que formes linéaires continues sur $\left(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}X), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Merci de votre attention.



Domaines nodaux aléatoires sur la sphère euclidienne,
modèle d'harmoniques sphériques pures, $\lambda = 6480$.
Crédit image : Alex Barnett (Dartmouth).